คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์

รหัสวิชา 2204-2004

อาจารย์สุวิทย์ บุตรวาปี

อาจารย์ประจำสาขาวิชาพื้นฐานทั่วไป

1. นิยามของเมทริกซ์

นิยามที่ 1 เมทริกซ์คือ กลุ่มของจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อน มาจัดเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นแถวตามแนวนอน (Horizontal) และ แนวตั้ง (Vertical) ซึ่งมีแถวตามแนวนอนเรียกว่า ***แถว (Row)*** และตามแนวตั้งเรียกว่า ***หลัก (Column)***

โดยทั่วไปนิยมใช้ในรูปต่อไปนี้แทน

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ใช้สัญลักษณ์ เป็น $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ **หรือ** $A_{m\times n}$

เมทริกซ์ที่มี 1 แถวและ *n* หลัก เรียก *เมทริกซ์แถว* เช่น

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ที่มี *m* แถวและ 1 สดมภ์ เรียก *เมทริกซ์หลัก* เช่น

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) **คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก (*m=n*) หรือเรียกว่าเมทริกซ์อันดับ *n* มีรูปทั่วไปคือ**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่ง *i=j* เรียก ***เส้นเส้นทแยงมุมหลัก***

เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix หรือ Null Matrix)

คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์หมด เช่น

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ทแยงมุม(Diagonal Matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวที่ไม่ได้อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์เชิงสเกล่าร์(Scalar Matrix) คือเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันทั้งหมด เช่น

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix หรือ Unit Matrix)

Unit Matrix) คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากับ 1 ทั้งหมด ใช้สัญลักษณ์ I หรือ I_n แทนเอกลักษณ์เมทริกซ์อันดับ n เช่น

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ หรือ } I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์ขนาด ________ แถว

________ หลัก

เขียนด้วยสัญลักษณ์ ____________

Ex. จงบอกประเภทและอันดับของเมทริกซ์ลักษณะพิเศษต่อไปนี้

1. $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

2. พีชคณิตของเมทริกซ์

2.1 การเท่ากันของเมทริกซ์ (Equal Matrix)

ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times q}$

จะได้ $A=B$ ก็ต่อเมื่อ $m=p$ และ $n=q$

และ $a_{ij}=b_{ij}$ ทุกค่าของ i และ j

2.2 การบวกลบเมทริกซ์ (Matrix Addition or Subtraction)

ให้ $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ และ $B = \left[b_{ij} \right]_{p \times q}$

แล้ว $A \pm B = C$

โดยที่ $C = \left[c_{ij} \right]_{m \times n} = \left[a_{ij} \pm b_{ij} \right]_{m \times n}$

2.3 การคูณเมทริกซ์

การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกล่าร์ (Scalar Multiplication)

ให้ $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ และ k เป็นสเกลาร์ ดังนั้น

$$kA = \left[ka_{ij} \right]_{m \times n}$$

นั่นคือ เป็นการนำ k คูณกับสมาชิกทุกตัวในเมตริกซ์

เช่น

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

จงคำนวณหา $4A$, $-3A$

วิธีทำ $4A = \begin{bmatrix} 4(1) & 4(-5) & 4(3) \\ 4(4) & 4(1) & 4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -20 & 12 \\ 16 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$-3A = \begin{bmatrix} -3(1) & -3(-5) & -3(3) \\ -3(4) & -3(1) & -3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 15 & -9 \\ -12 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

<u>Ex.</u> **จงหาผลคูณของเมตริกซ์ AB เมื่อ**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 5 & 2 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\\ 7 & 3\end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$AB=\begin{bmatrix}(1)(2)+(2)(4)+(3)(7) & (1)(0)+(2)(1)+(3)(3)\\ (0)(2)+(-1)(4)+(1)(7) & (0)(0)+(-1)(1)+(1)(3)\\ (5)(2)+(2)(4)+(-3)(7) & (5)(0)+(2)(1)+(-3)(3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}31 & 11\\ 3 & 2\\ -3 & -7\end{bmatrix}$$

3. ชนิดของเมทริกซ์

3.1 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transposed Matrix)

ถ้า $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ แล้ว เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A

คือ $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times m}$ และใช้สัญลักษณ์ A^T หรือ A'

แทนเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}_{4x3}$$

$$A^{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{3x4}$$

Ex. จงหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ -7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

3.4 เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix)

เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน *(Lower Triangular Matrix)* คือ เมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่เหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด

เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง *(Upper Triangular Matrix)* คือ เมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ det(A) หรือ   มีความสำคัญในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ วิธีคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์มีหลายวิธีดังนี้

1. การหาโดยตรง (ในกรณีของเมทริกซ์ขนาดเล็ก) เช่น

เมทริกซ์ขนาด 2x2 (หาดีเทอร์มิแนนต์ได้ในกรณีของเมทริกซ์จตุรัสเท่านั้น)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \det(A) = ad - cb$$

เมทริกซ์ขนาด 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$\det(A) = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

เมทริกซ์ที่มีขนาดมากกว่านี้จะทำแบบนี้ไม่ได้ ต้องใช้วิธีกระจาย cofactor เท่านั้น

การหา Determinant โดยใช้วิธีการกระจาย Cofactor

Cofactor (*Cij*) หาได้จาก Matrix *A* ถูกตัดแถวที่ *i* และ หลัก ที่ *j* ออกไปแล้วหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่เหลือ (จะมีขนาดเล็กลงเสมอ) แล้วนำ **cofactor** มาหาค่าดีเทอร์มิแนนท์

ตัวอย่างที่ 1. จงหาค่าของ C_{12} และ C_{23}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

หาค่า C_{12} ต้องตัดแถวที่ 1 และ Column ที่ 2 ออก จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

คูณข้างหน้าด้วย $(-1)^{(1+2)}$ จะได้

$$A_{12} = (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -42$$

ตัวอย่างที่ 1. (ต่อ)

หาค่า C_{23} ต้องตัดแถวที่ 2 และ หลัก ที่ 3 ออก จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

คูณข้างหน้าด้วย $(-1)^{(2+3)}$ จะได้

$$A_{23} = (-1)^{(2+3)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

การกระจาย Cofactor เราสามารถเลือกว่าจะใช้แถวหรือ หลัก ใดก็ได้ แต่การคำนวณจะง่ายขึ้นถ้าเราเลือกแถวหรือ หลัก ที่มีสมาชิกเป็น 0 อยู่มาก

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยเมทริกซ์

วิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นมี 3 วิธีคือ

1 ใช้ Inverse matrix เหมาะกับระบบที่มีสมการจำนวนไม่มาก (2-3 สมการ)

2 ใช้ Cramer's rule เหมาะกับระบบที่มีสมการจำนวนไม่มาก

3 ใช้วิธีการของ Gauss-Elimination ซึ่งเหมาะกับระบบที่มีสมการจำนวนมาก

ตัวอย่างที่ 5. จงหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้ Cramer's rule

$$x + y - 3z = 0$$

$$y - 4z = 0$$

$$x - y - z = 5$$

วิธีทำ 1. เขียนโจทย์ให้อยู่ในรูป Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

เว็คเตอร์ทราบค่า

เมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์

เว็คเตอร์ไม่ทราบค่า

2. หา Determinant ของ A

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -4\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-6$$

3. หาค่า x โดย

เว็คเตอร์ทราบค่า
แทน สปส ของ x

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -4\\ 5 & -1 & -1\end{vmatrix}}{\det(A)}=\frac{5}{6}$$

4. หาค่า y โดย

เว็คเตอร์ทราบค่าแทน สปส ของ y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{10}{3}$$

5. หาค่า z โดย

เว็คเตอร์ทราบค่าแทน สปส ของ z

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{5}{6}$$

จะเห็นวิธีของ Crammer rule ต้องหาดีเทอร์มิแนนท์หลายครั้ง จึงไม่เหมาะกับระบบสมการเชิงเส้นที่มีหลายตัวแปร (มากกว่า 3)

THE END